OPCIÓN A

1. a) Discuta por qué valores de **m** el sistema siguientes es compatible:

$$\begin{cases} x+(m-2)y+2mz=1 \\ 3x-y-2z=2 \\ x+z=3 \end{cases}$$ **(7 puntos)**

b) Resuélvalo en el caso en que **m = 1. (3 puntos)**

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & m-2 & 2m \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & m-2 & 2m \\ 0 & -1-3m+6 & -2-6m \\ 0 & -m+2 & 1-2m \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 5-3m & -2-6m \\ 2-m & 1-2m \end{vmatrix}=(1-2m)(5-3m)+(2+6m)(2-m)$$

$$|A|=5-3m-10m+6m^2+4-2m+12m-6m^2=-3m+9=-3\cdot(m-3)\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow -3\cdot(m-3)=0\Rightarrow$$

$$m-3=0\Rightarrow m=3$$

$$\forall m\in\Re-\{3\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3=\text{Número de incógnitas}\Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

$$Si\ m=3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & -4 & -20 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=2\neq rang\ (A/B)=3\Rightarrow$$

Sistema Incompatible

b)

$$Si\ m=1\Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)\Rightarrow -6z=-5\Rightarrow z=\frac{5}{6}\Rightarrow x+\frac{5}{6}=3\Rightarrow x=3-\frac{5}{6}=\frac{13}{6}$$

$$\frac{13}{6}-y+2\cdot\frac{5}{6}=1\Rightarrow y=\frac{13}{6}+\frac{10}{6}-1=\frac{17}{6}\Rightarrow \text{Solución}\Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=\left(\frac{13}{6}\ ,\ \frac{17}{6}\ ,\ \frac{5}{6}\right)$$

2. Determine **m** para que la recta $\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{1}$ y el plano $\pi : x+2y+mz=6$ forman un ángulo de 45 grados **(6 puntos)** y calcular el punto de intersección entre la recta y el plano. **(4 puntos)**

Sea **P** el punto de intersección entre la recta **r** y el plano π

$$sen\ \alpha=\frac{\left|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_\pi}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_\pi}\right|}\Rightarrow sen\ 45^{o}=\frac{\left|(0\,,1\,,1)\cdot(1\,,2\,,m)\right|}{\sqrt{0+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+m^2}}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|2+m|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+m^2}}\Rightarrow$$

$$\frac{2}{2}=\frac{|2+m|}{\sqrt{5+m^2}}\Rightarrow 1=\frac{|2+m|}{\sqrt{5+m^2}}\Rightarrow\begin{cases}1=\dfrac{2+m}{\sqrt{5+m^2}}\\ 1=-\dfrac{2+m}{\sqrt{5+m^2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{5+m^2}=2+m\\ \sqrt{5+m^2}=-(2+m)\end{cases}\Rightarrow\left(\sqrt{5+m^2}\right)^2=(2+m)^2\Rightarrow$$

$$5+m^2=4+4m+m^2\Rightarrow 4m-1=0\Rightarrow 4m=1\Rightarrow m=\frac{1}{4}\Rightarrow x+2y+\frac{1}{4}\cdot z=6\Rightarrow\pi:4x+8y+z-24=0\Rightarrow$$

$$r\equiv\begin{cases}x=1\\ y=-1+\lambda\\ z=3+\lambda\end{cases}\Rightarrow 4\cdot 1+8\cdot(-1+\lambda)+(3+\lambda)-24=0\Rightarrow 4-8+8\lambda+3+\lambda-24=0\Rightarrow 9\lambda-25=0\Rightarrow$$

$$9\lambda=25\Rightarrow\lambda=\frac{25}{9}\Rightarrow P\begin{cases}x=1\\ y=-1+\dfrac{25}{9}\\ z=3+\dfrac{25}{9}\end{cases}\Rightarrow P\left(1\,,\frac{16}{9}\,,\frac{52}{9}\right)$$

3. Considera la función **f (x) = 2.e$^{-(x-1)}$ + 4x** Calcular sus máximos y mínimos relativos
(4 puntos), hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento **(3 puntos)** y demostrar que
f (x) es cóncava para todo valor **x**. Entendemos que una función es cóncava en un punto **x** si
f ''(x) > 0

$$f'(x)=2\cdot(-1)\cdot e^{-(x-1)}+4\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow -2\cdot e^{-(x-1)}+4=0\Rightarrow 2\cdot e^{-(x-1)}=4\Rightarrow e^{-(x-1)}=2\Rightarrow$$
$$\ln e^{-(x-1)}=\ln 2\Rightarrow -(x-1)\cdot\ln e=\ln 2\Rightarrow -(x-1)=\ln 2\Rightarrow x-1=-\ln 2\Rightarrow x=1-\ln 2$$
$$f''(x)=2\cdot e^{-(x-1)}\Rightarrow f''(1-\ln 2)=2\cdot e^{1-(1-\ln 2)}=2\cdot e^{\ln 2}>0\Rightarrow$$
$$Mínimo\ relativo\Rightarrow x=1-\ln 2\Rightarrow f(1-\ln 2)=2e^{-(1-\ln 2-1)}+4\cdot(1-\ln 2)=2e^{\ln 2}+4\cdot(1-\ln 2)$$

$$f''(x)=2\cdot e^{-(x-1)}\Rightarrow Cóncava\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow 2\cdot e^{-(x-1)}>0\Rightarrow\begin{cases}2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ e^{-(x-1)}>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}\Rightarrow Cóncava\Rightarrow\forall x\in\Re$$

Es una función cóncava en todo su recorrido que es el campo de los números reales

4.- Calcula la siguiente integral indefinida $\int (x^2+1)\ln x\, dx$ **(10 puntos)**

$$\int (x^2+1)\ln x\, dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x - \int\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\frac{dx}{x} = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x - \int\left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx =$$

$$\begin{cases} \ln x = u \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = du \\ (x^2+1)\,dx = dv \Rightarrow v = \int (x^2+1)\,dx = \dfrac{x^3}{3}+x \end{cases}$$

$$\int (x^2+1)\ln x\, dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} - x = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} - x = x\left[\left(\frac{x^2}{3}+1\right)\ln x - \frac{x^2}{9} - 1\right] + K$$

OPCIÓN B

1. Sea **A** la matriz siguiente: $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ donde **a** es un valor real.

Calcule A^2, A^3 y A^4 **(4 puntos)** y hallad una formula general para la expresión de A^n.
(6 puntos)

$$A^2 = A\cdot A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ a+a & a^2 & 0 \\ 1 & a+a & a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2a & a^2 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2\cdot A=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2a & a^2 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 2a^2+a^2 & a^3 & 0 \\ a+2a & 2a^2+a^2 & a^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 3a^2 & a^3 & 0 \\ 3a & 3a^2 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3\cdot A=\begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 3a^2 & a^3 & 0 \\ 3a & 3a^2 & a^3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^4 & 0 & 0 \\ 3a^3+a^3 & a^4 & 0 \\ 3a^2+3a^2 & 3a^3+a^3 & a^4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^4 & 0 & 0 \\ 4a^3 & a^4 & 0 \\ 6a^2 & 4a^3 & a^4 \end{pmatrix}$$

$$A^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1} & a^n & 0 \\ \left[(n-1)^{n-1}+(n-1)\right]a^{n-2} & na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$$

2. Determine **m** para que la recta $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{m}=\dfrac{z+3}{3}$ sea paralela al plano $x+y-z=5$
(5 puntos) y calcula la distancia entre ellos. **(4 puntos)**

Para que sean paralelos la recta **r** y el plano π sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(-1\,,\,m\,,\,3) \\ \overrightarrow{v_\pi}=(1\,,1\,,-1) \end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{v_r}\perp\overrightarrow{v_\pi}\Rightarrow \overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_\pi}=0\Rightarrow(-1\,,\,m\,,\,3)\cdot(1\,,1\,,-1)=0\Rightarrow -1+m-3=0\Rightarrow m=4$$

Se halla la distancia de un punto **R** cualquiera de la recta **r** (tomamos el indicado en su ecuación) y hallaremos la distancia al plano π

$$R(0\,,-1\,,-3)\cdot\Rightarrow d(r\,,\pi)=d(R\,,\pi)=\frac{|0+1-(-3)|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{|4|}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\,u$$

3.- De todos los rectángulos de diagonal $6\sqrt{2}$ cm., determinar el rectángulo de perímetro máximo. **(10 puntos)**

Sean **B** y **H** la base y la altura del rectángulo

$$6\sqrt{2}\begin{cases} 6\sqrt{2}=\sqrt{B^2+H^2} \Rightarrow 36\cdot 2 = B^2+H^2 \Rightarrow 72 = B^2+H^2 \Rightarrow B^2 = 72-H^2 \Rightarrow B=\sqrt{72-H^2} \\ P = 2B+2H = 2\cdot(B+H) \end{cases} \Rightarrow$$

$$P = 2\cdot(B+H) = 2\cdot\left(\sqrt{72-H^2}+H\right) \Rightarrow P' = \frac{dP}{dH} = 2\cdot\left(\frac{-2H}{2\sqrt{72-H^2}}+1\right) = 2\cdot\left(\frac{-H}{\sqrt{72-H^2}}+1\right)$$

$$P' = 2\cdot\left(\frac{-H+\sqrt{72-H^2}}{\sqrt{72-H^2}}\right) \Rightarrow P'=0 \Rightarrow 2\cdot\left(\frac{-H+\sqrt{72-H^2}}{\sqrt{72-H^2}}\right)=0 \Rightarrow -H+\sqrt{72-H^2}=0 \Rightarrow$$

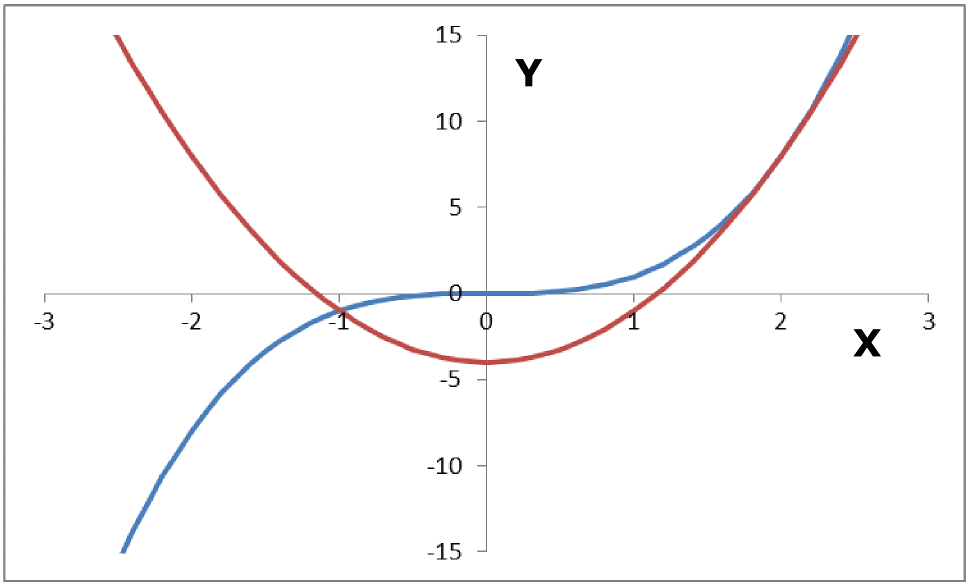
$$H=\sqrt{72-H^2} \Rightarrow H^2 = 72-H^2 \Rightarrow 2H^2 = 72 \Rightarrow H^2 = 36 \Rightarrow H=\sqrt{36}=6$$

$$P'' = \frac{d^2P}{dH^2} = 2\cdot\frac{-\sqrt{72-H^2}-\frac{2H}{2\sqrt{72-H^2}}(-H)}{72-H^2} = 2\cdot\frac{-\sqrt{72-H^2}+\frac{H^2}{\sqrt{72-H^2}}}{72-H^2} = 2\cdot\frac{\frac{-72+H^2-H^2}{\sqrt{72-H^2}}}{72-H^2}$$

$$P'' = \frac{-144}{(72-H^2)\sqrt{72-H^2}} \Rightarrow P''(6) = \frac{-144}{(72-6^2)\sqrt{72-6^2}} = \frac{-144}{36\sqrt{36}} = -\frac{144}{6\cdot 36} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} < 0 \Rightarrow Máximo$$

$$\begin{cases} H = 6\,cm \\ B=\sqrt{72-6^2}=\sqrt{72-36}=6\,cm. \end{cases}$$

4. Consideremos las funciones **f(x) = x³** y **g(x) = 3x² – 4**. Haga un dibujo aproximado de las funciones anteriores para $x\in[-3,3]$ **(6 puntos)**. Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones anteriores. **(4 puntos)**



Continuación Problema 4 de la opción B

$$\textit{Puntos de corte con OX} \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} x^3=0 \Rightarrow x=0 \\ 3x^2-4=0 \Rightarrow 3x^2=4 \Rightarrow x^2=\dfrac{4}{3} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{4}{3}} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$\textit{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow x^3=3x^2-4 \Rightarrow x^3-3x^2+4=0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow x^3-3x^2+4=0 \Rightarrow (x+1)(x^2-4x+4)=0 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow$$

$$\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 4=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{0}}{2}=2$$

$$A=\left|\int_{-1}^{0}(3x^2-4)\,dx\right|-\left|\int_{-1}^{0}x^3\,dx\right|+\left|\int_{0}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}(3x^2-4)\,dx\right|+\int_{0}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}x^3\,dx+\int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{2}x^3\,dx-\int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{2}(3x^2-4)\,dx$$

$$A=-\int_{-1}^{0}(3x^2-4)\,dx+\int_{-1}^{0}x^3\,dx-\int_{0}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}(3x^2-4)\,dx+\int_{0}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}x^3\,dx+\int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{2}x^3\,dx-\int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{2}(3x^2-4)\,dx$$

$$A=\int_{-1}^{2}x^3\,dx-\int_{-1}^{2}(3x^2-4)\,dx=\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)\,dx=\frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_{-1}^{2}-3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-1}^{2}+4\cdot\left[x\right]_{-1}^{2}$$

$$A=\frac{1}{4}\cdot\left[2^4-(-1)^4\right]-\left[2^3-(-1)^3\right]+4\cdot\left[2-(-1)\right]=\frac{1}{4}\cdot(16-1)-(8+1)+4\cdot(2+1)=\frac{15}{4}-9+12=\frac{15}{4}+3=\frac{27}{4}\,u^2$$